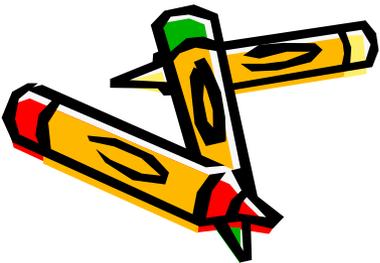
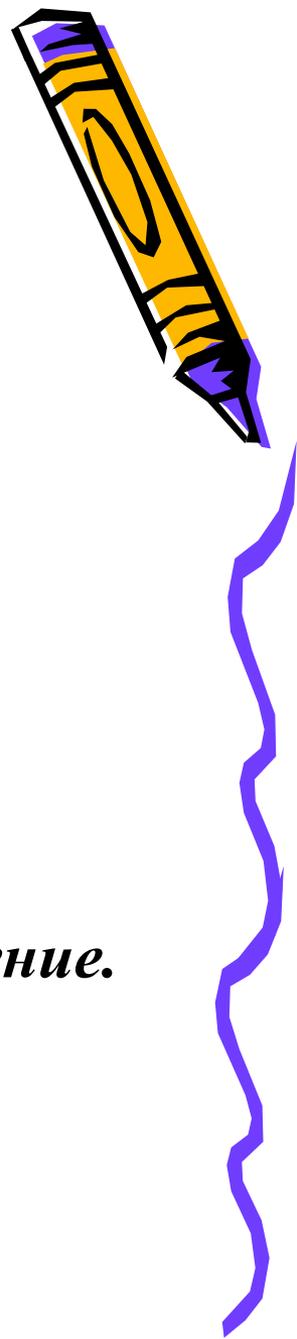


Лекция 3

Тема: «Площадь фигуры и её измерение»

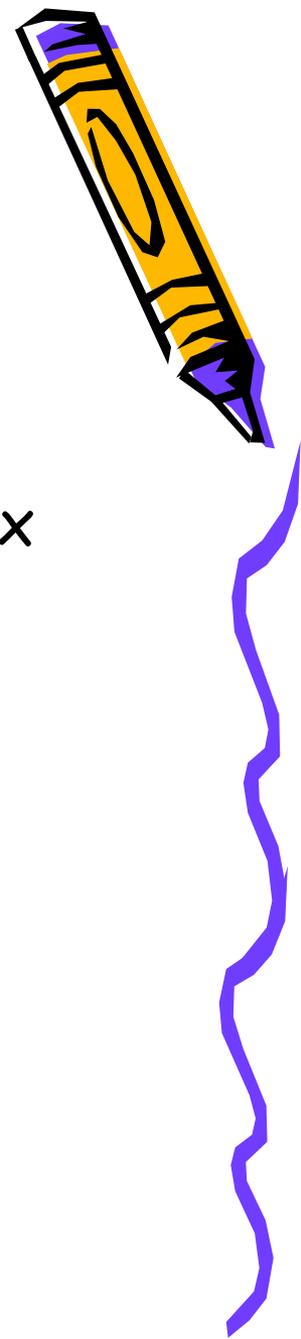
План:

- 1. Понятие площади фигуры. Измерение.*
- 2. Площадь многоугольника.*
- 3. Равновеликие и равносторонние фигуры.*
- 4. Площадь произвольной плоской фигуры и её измерение.*



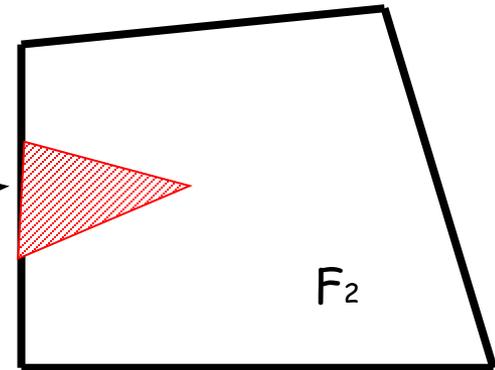
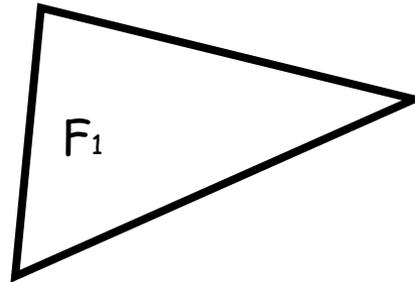
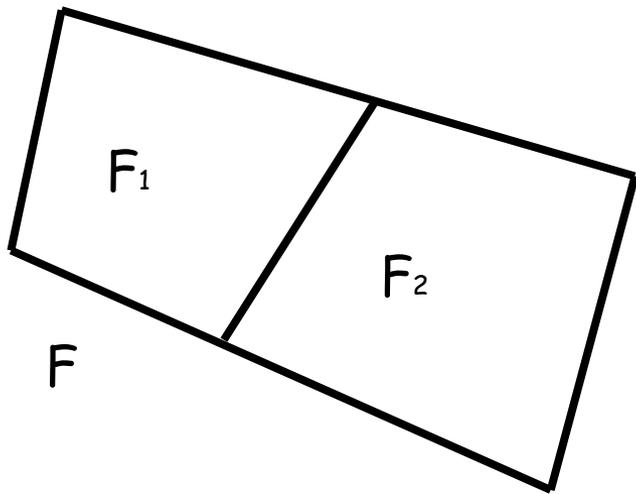
Рекомендуемая литература

- Стойлова Л.П. Математика; учебник для студентов высших педагогических учебных заведений.-М: Издательский центр "Академия", 2012.- 424 с.
- Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики.-М.: Просвещение, 1988.-320 с.
- Учебники математики начальных классов



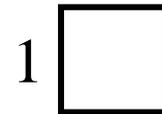


1. Понятие площади фигуры и её измерение



$$F = F_1 \oplus F_2$$

Единица площади - площадь квадрата со стороной, равной единичному отрезку.



Обозначения:

E- площадь единичного квадрата

S(F)-численное значение площади фигуры F

Условия для $S(F)$:

1. $S(F) > 0$

2. $F_1 = F_2 \Rightarrow S(F_1) = S(F_2)$

3. $F = F_1 \oplus F_2 \Rightarrow S(F) = S(F_1) + S(F_2)$

4. При замене единицы площади численное значение площади данной фигуры F увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица больше (меньше) старой.

5. $S(E) = 1$

6. $F_1 \subset F_2 \Rightarrow S(F_1) \leq S(F_2)$

Связь с начальным курсом математики

ЕДИНИЦЫ ПЛОЩАДИ

Единицы площади — это квадраты, стороны которых измеряются единицами длины.

Назови по порядку известные тебе единицы площади, начиная с квадратного сантиметра.

Для измерения больших площадей используют **квадратный километр**.

Это квадрат, сторона которого равна 1 км.

Слова «квадратный километр» сокращённо при числе записывают так: 1 км^2 , 8 км^2 , 140 км^2 .

В квадратных километрах измеряют, например, площади государств: так, Россия занимает площадь более $17\,000\,000 \text{ км}^2$, а Франция — $551\,000 \text{ км}^2$.

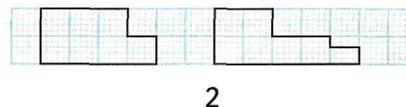
184. Вычисли, сколько в 1 км^2 квадратных метров, зная, что $1 \text{ км} = 1\,000 \text{ м}$.

Для измерения маленьких площадей используют **квадратный миллиметр** — это квадрат, сторона которого 1 мм. Слова «квадратный миллиметр» при числах сокращённо записывают так: 1 мм^2 , 9 мм^2 , 70 мм^2 .

Вычисли, сколько в 1 см^2 квадратных миллиметров, зная, что $1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$.

Для черчения и измерения фигур маленькой площади удобно использовать миллиметровую бумагу.

185. На рисунке 1 покажи 1 мм^2 , 1 см^2 , половину квадратного сантиметра, четвертую часть квадратного сантиметра и запиши, сколько это квадратных миллиметров.



186. Рассмотрите рисунок 2. Площадь какой фигуры больше и на сколько квадратных миллиметров?

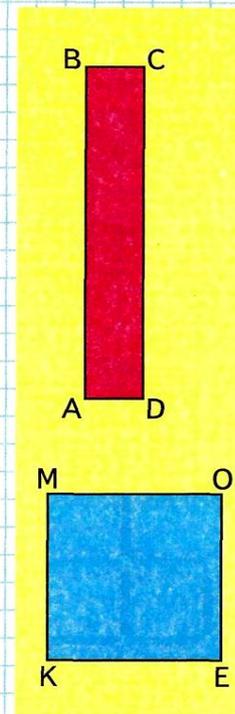


187. Найди площадь прямоугольника $ABCD$ и квадрата $KMOE$ в квадратных миллиметрах и вырази её в квадратных сантиметрах.



Квадратный километр

Квадратный миллиметр



Математика 4 класс.
Авторы: Моро М.И.,
Бантова М.А. и др.

Единицы площади

$$1 \text{ см}^2 = 100 \text{ мм}^2$$

$$1 \text{ дм}^2 = 10\,000 \text{ мм}^2$$

$$1 \text{ дм}^2 = 100 \text{ см}^2$$

$$1 \text{ м}^2 = 10\,000 \text{ см}^2$$

$$1 \text{ м}^2 = 100 \text{ дм}^2$$

$$1 \text{ а} = 10\,000 \text{ дм}^2$$

$$1 \text{ а} = 100 \text{ м}^2$$

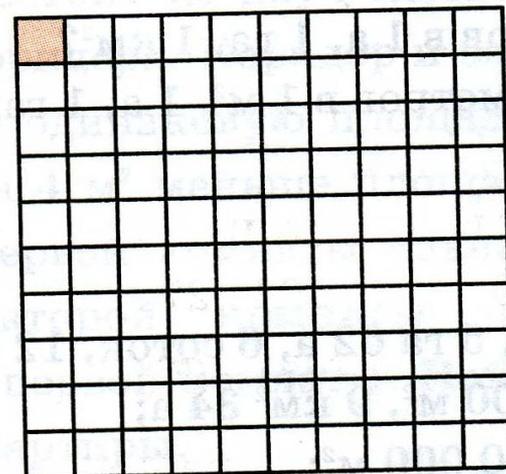
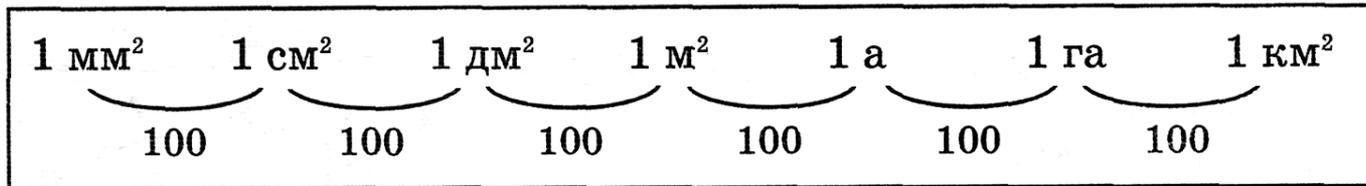
$$1 \text{ га} = 10\,000 \text{ м}^2$$

$$1 \text{ га} = 100 \text{ а}$$

$$1 \text{ км}^2 = 10\,000 \text{ а}$$

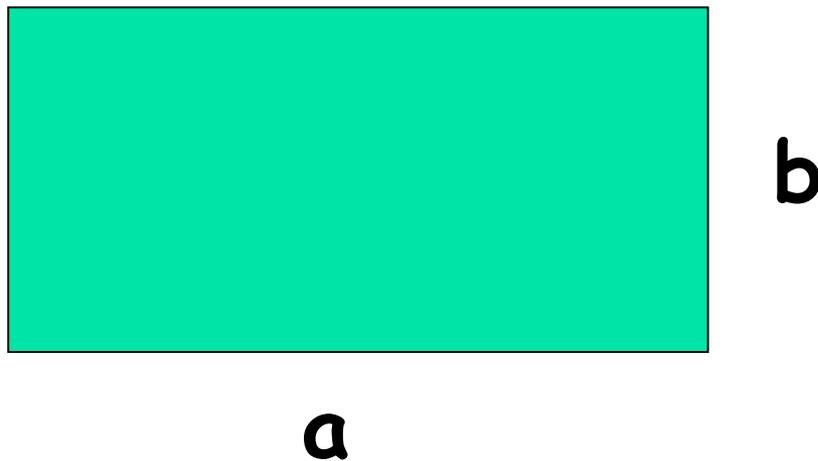
$$1 \text{ км}^2 = 100 \text{ га}$$

$$1 \text{ км}^2 = 1\,000\,000 \text{ м}^2$$





2. Площадь многоугольника

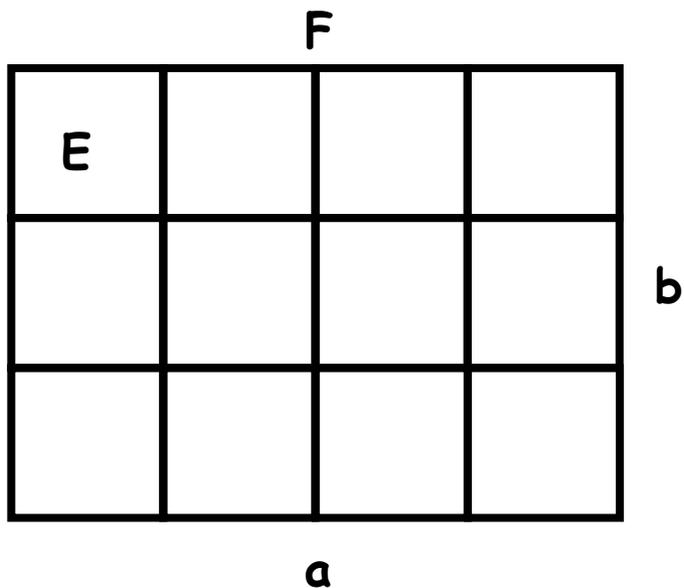


$$S = a \cdot b$$

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$

$$F = E \oplus E \oplus E \oplus \dots \oplus E$$

$$S(F) = \underbrace{S(E) + S(E) + \dots + S(E)}_{ab \text{ слагаемых}} = a \cdot b \cdot \underbrace{S(E)}_1 = a \cdot b$$

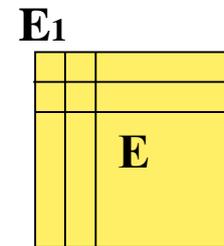


Пусть $a, b \in \mathbb{Q}_+$

$$a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q}, \quad \text{где } m, n, p, q \in \mathbb{N}$$

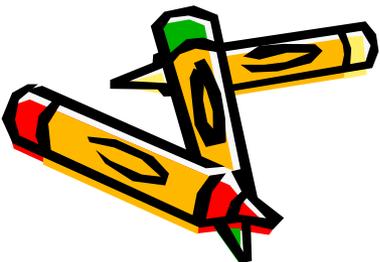
Приведём дроби к общему знаменателю:

$$a = \frac{mq}{nq}, b = \frac{np}{nq},$$



Разобьём сторону единичного квадрата E на nq равных частей. Если через точки деления провести прямые, параллельные сторонам, то квадрат E разделится на $(nq)^2$ более мелких квадратов. Обозначим площадь каждого такого квадрата E_1 . Тогда $S(E) = (nq)^2 \cdot S(E_1)$, а поскольку

$$S(E) = 1, \text{ то } S(E_1) = \frac{1}{(nq)^2}$$



Так как $a = \frac{mq}{nq}$, $b = \frac{np}{nq}$, то отрезок длиной $\frac{1}{nq}$ укладывается на стороне a точно mq раз, а на стороне b – точно np раз.

Поэтому прямоугольник F будет состоять из $mq \cdot np$ квадратов E_1 .

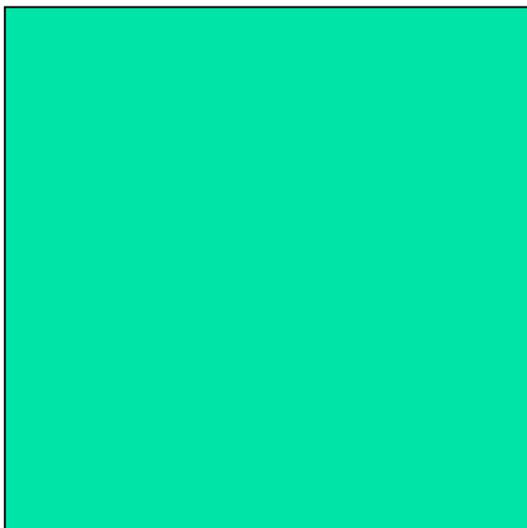
$$S(F) = mq \cdot np \cdot S(E_1) = mq \cdot np \cdot \frac{1}{(nq)^2} = \frac{mq}{nq} \cdot \frac{np}{np} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = ab$$

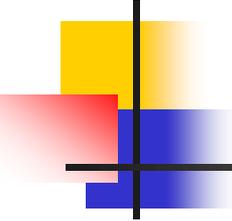


Следствие. Площадь квадрата

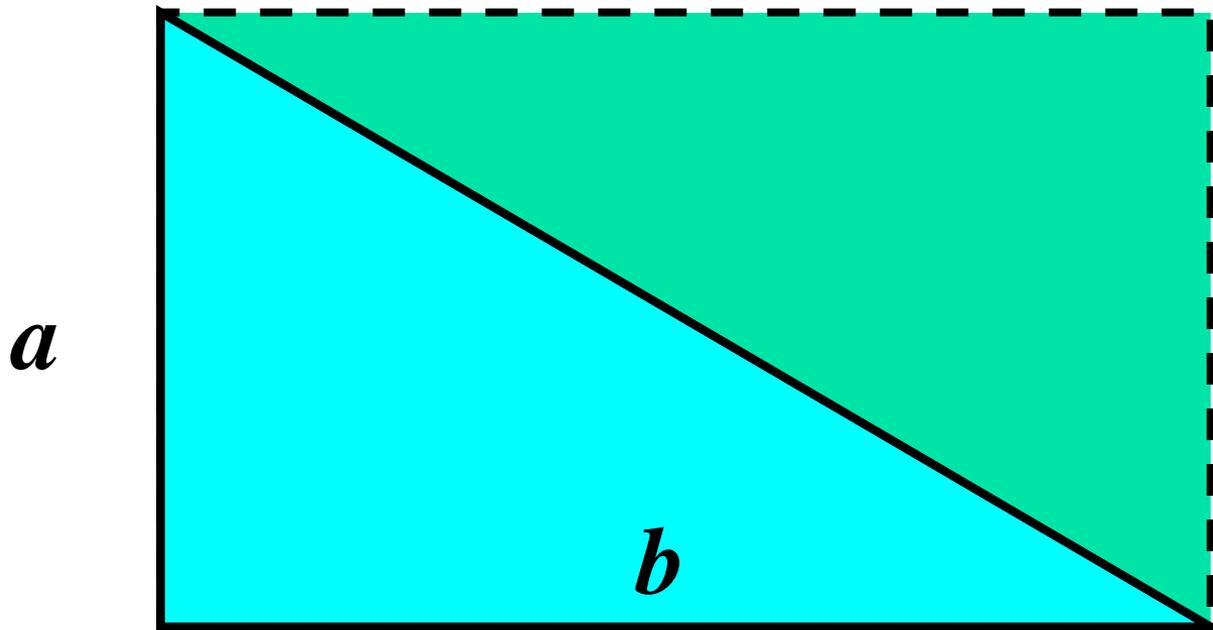
$$S = a^2$$

a





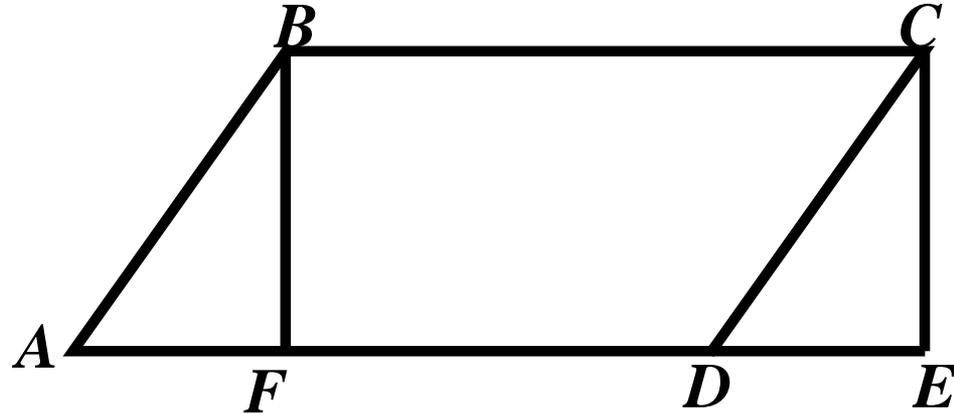
*Следствие. Площадь прямоугольного
треугольника*



$$S = \frac{1}{2} a \cdot b$$

Площадь параллелограмма

$$S = AD \cdot BF$$



Доказательство.

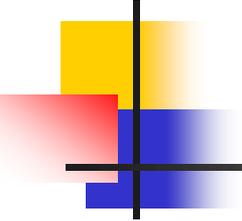
$$CE \perp AD \quad S(ABCE) = S(ABCD) + S(CDE)$$

$$BF \perp AD \quad S(ABCE) = S(BCEF) + S(ABF)$$

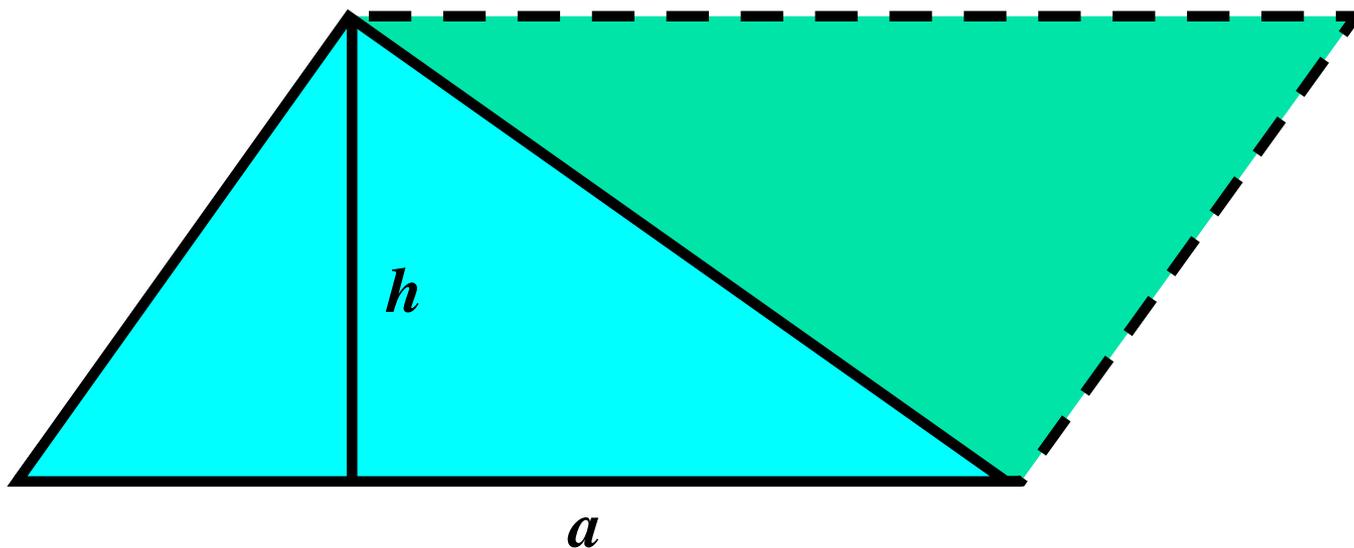
$$\triangle ABF = \triangle CDE \Rightarrow S(ABF) = S(CDE) \Rightarrow$$

$$S(ABCD) = S(BCEF) = BC \cdot BF$$

$$BC = AD \Rightarrow S(ABCD) = AD \cdot BF$$

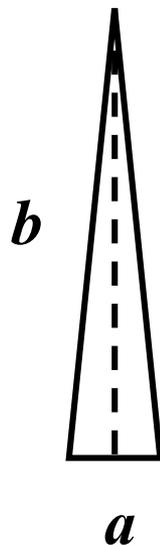


Следствие. Площадь треугольника



$$S = \frac{1}{2} ha$$

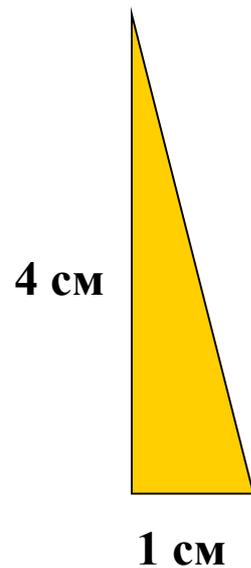
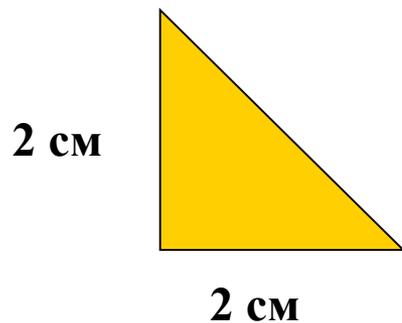
В египетских папирусах



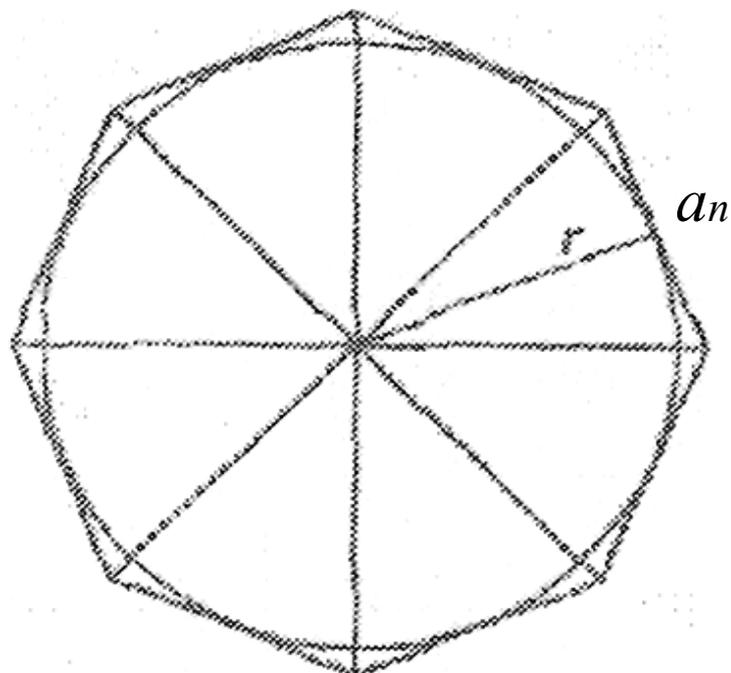
Площадь
равнобедренного
треугольника

$$S = \frac{1}{2} ab$$

**Фигуры, у которых площади равны,
называются *равновеликими*.**



Площадь правильного многоугольника



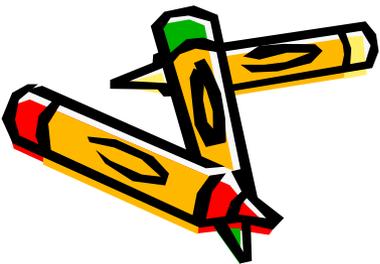
$$S = \frac{1}{2} Pr$$

P – периметр правильного многоугольника

r – радиус вписанной окружности

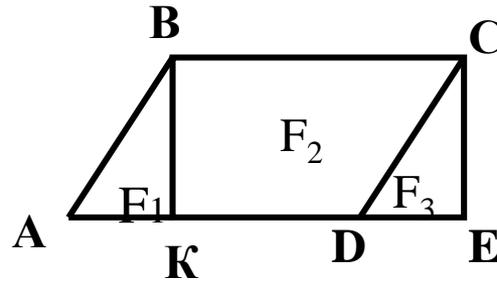
Доказательство. $S_{\Delta} = \frac{1}{2} a_n \cdot r$, a_n – сторона n -угольника

$$S = \frac{1}{2} a_n \cdot r \cdot n, \text{ но } a_n \cdot n = P \Rightarrow S = \frac{1}{2} Pr$$



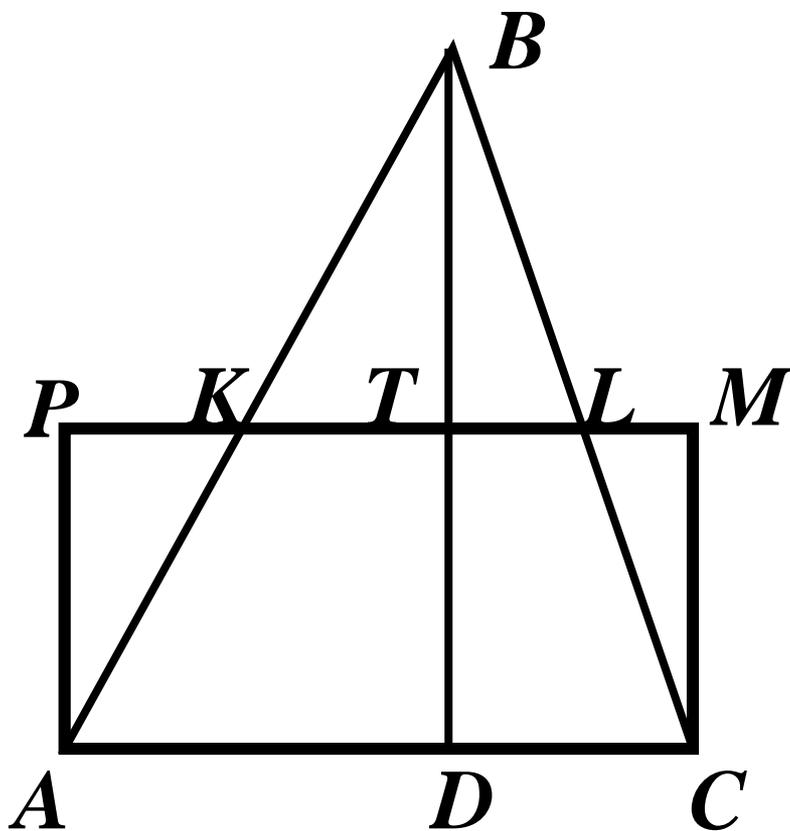


Многоугольники F_1 и F_2 называются *равносоставленными*, если их можно разбить на соответственно равные части.



- **равносоставленные фигуры равновелики;**
- **любые два равновеликих многоугольника равносоставлены (теорема Бойяи-Гервина)**





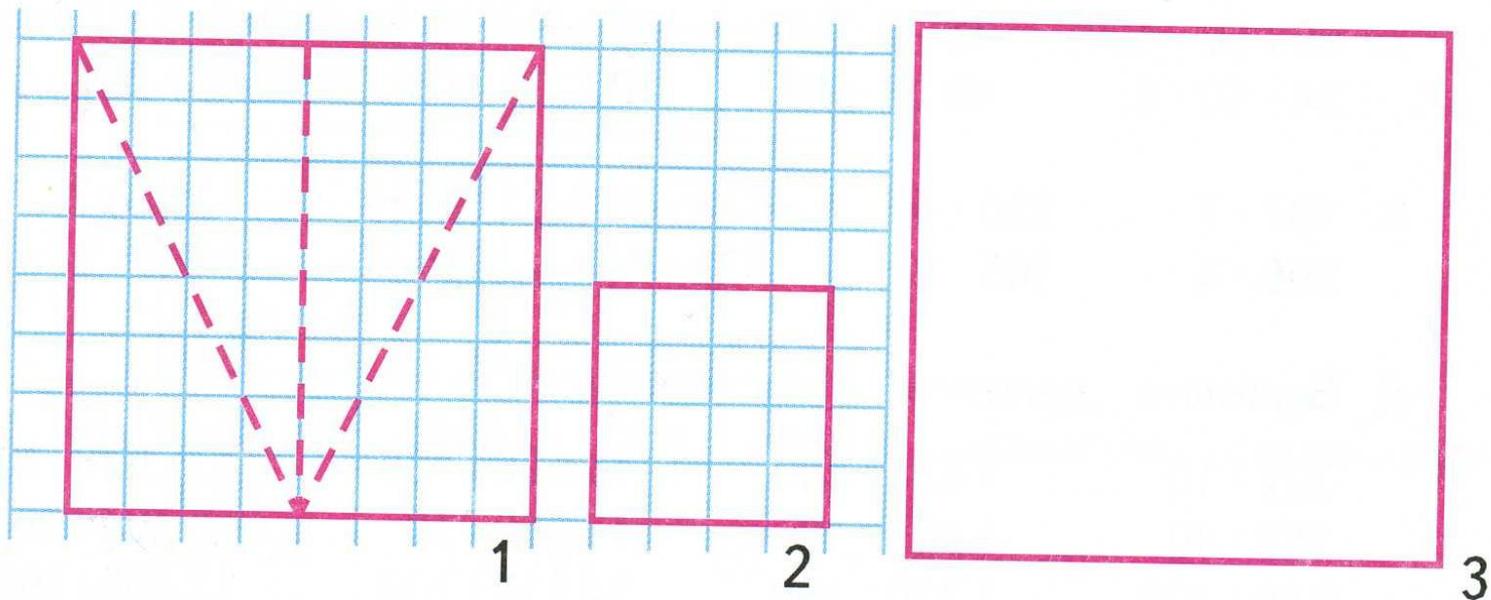
BD – высота

KL – средняя линия

Всякий треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником

Задание для младших школьников

1. Начерти и вырежи 2 таких квадрата (1 и 2). Первый квадрат разрежь на части, как показано на рисунке. Из полученных треугольников и квадрата 2 сложи квадрат 3. Найди его площадь.



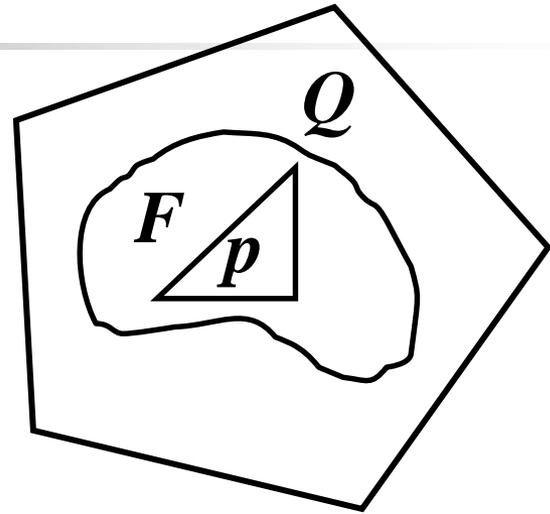
3. Площадь произвольной плоской фигуры и её измерение

Q- объемлющая фигура

P- входящая фигура

$$P \subset F \subset Q$$

$$S(P) \leq S(F) \leq S(Q)$$



Если $S(Q) - S(P) \rightarrow 0$, то $S(F)$ – площадь фигуры F

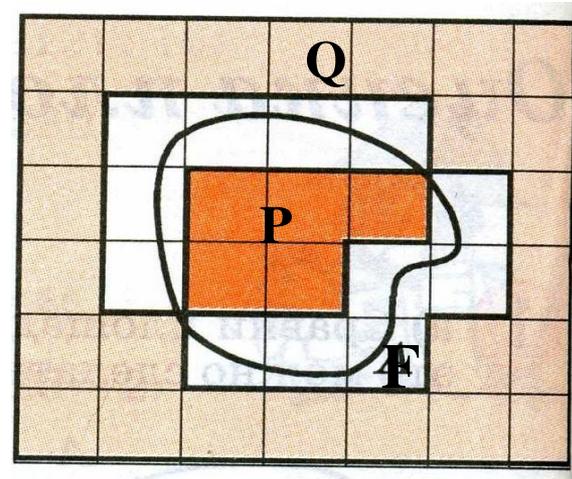


Площадь круга

$$S_{\text{кр}} = \pi r^2$$

Палетка – прозрачная пластина, на которой нанесена сеть квадратов.

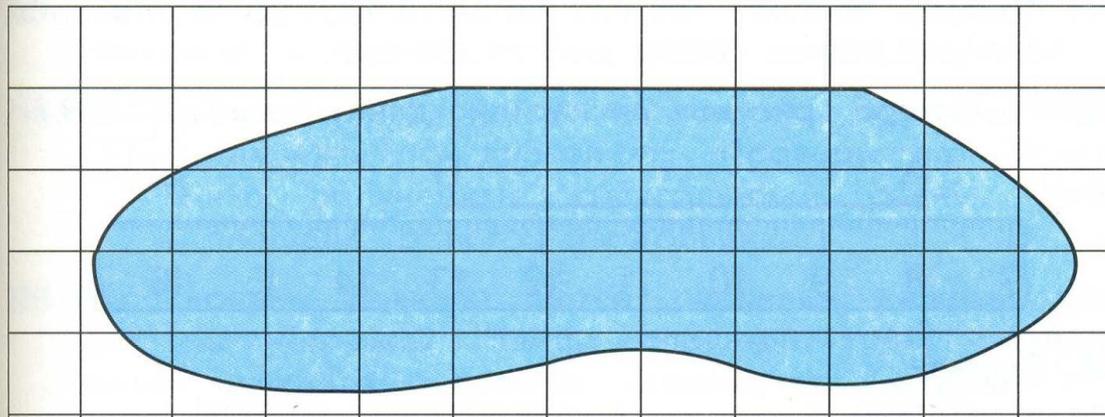
$$S(F) = \frac{S(Q) + S(P)}{2}$$



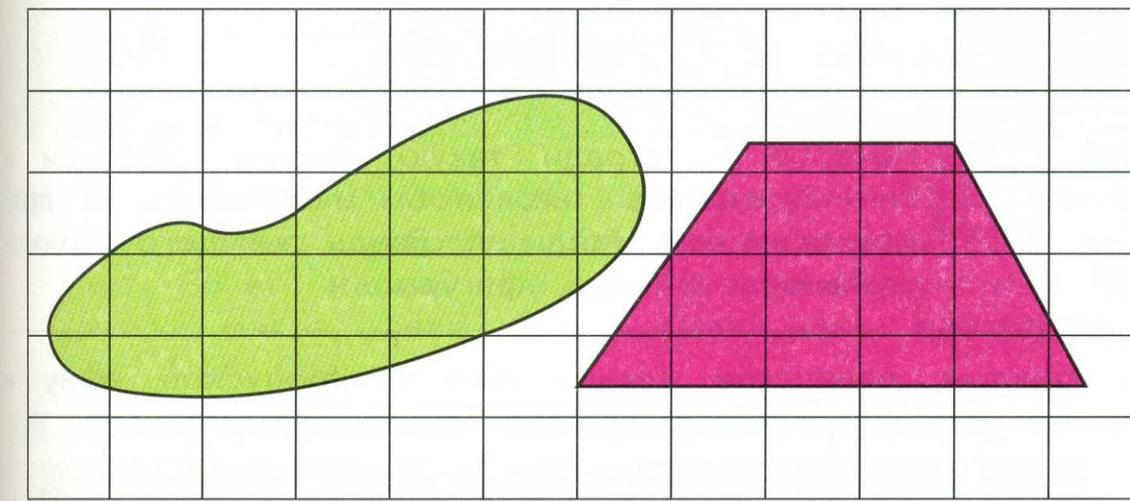
$$S(P) = m, \quad S(Q) = m + n$$

$$S(F) = \frac{m + (m + n)}{2} = \frac{2m + n}{2} = m + \frac{n}{2}$$

Задания для младших школьников

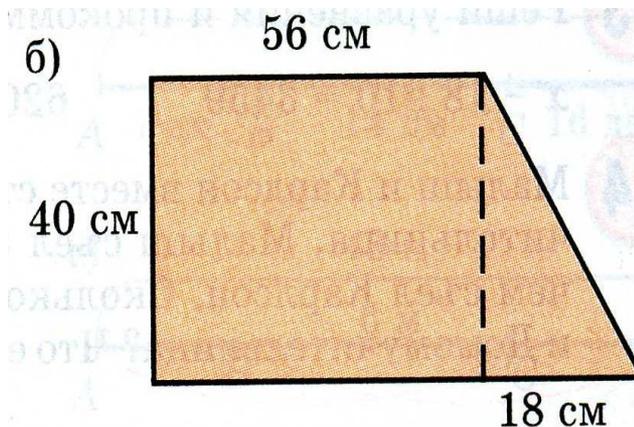
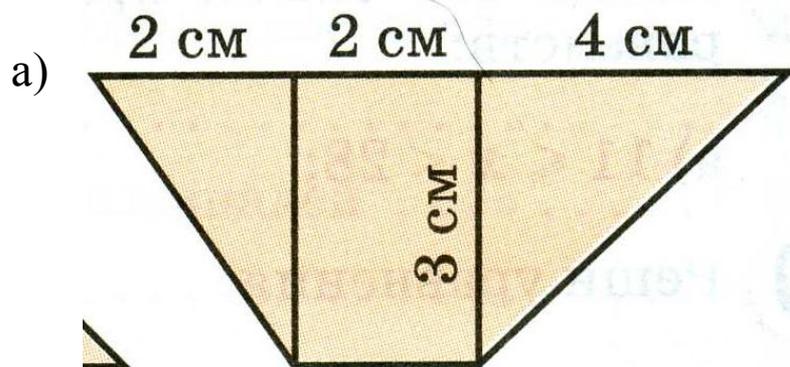


208. Найди площади данных фигур:



Задание.

Вычислите площадь фигуры



Результат выразите в квадратных дециметрах